

第6章 矩阵的相似对角化

6.1 特征值和特征向量

1. 求下列矩阵全部的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

特征多项式为 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)$

从而全部特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=3$.

通过解齐次线性方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$, 不难得到

属于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k_1 \neq 0$, 属于 $\lambda_2=3$ 的特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, k_2 \neq 0$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

特征多项式为 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -2 & -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$

从而特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=1, \lambda_3=2$

关于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k_1 \neq 0$

关于 $\lambda_2=1$ 的特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, k_2 \neq 0$

关于 $\lambda_3=2$ 的特征向量为 $k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_3 \neq 0$

2. 已知 $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征向量, 求常数 a 以及特征

向量 α 所对应的特征值.

α 是 A 的特征向量 $\Rightarrow A\alpha$ 与 α 线性相关

而 $A\alpha = \begin{pmatrix} a+2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 从而必有 $A\alpha = 3\alpha \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ \text{特征值 } \lambda=3 \end{cases}$
 α 对应的

3. 设 3 阶方阵 A 有特征值 $-1, 1, 2$, 求

(1) 矩阵 $A^3 + A + 2I$ 的特征值及行列式的值;

设 $f(x) = x^3 + x + 2$. (2) $A^3 + A + 2I = f(A)$. 因此

$f(-1), f(1), f(2)$ 为 $f(A)$ 的全部特征值, 即 $0, 4, 12$ 为 $A^3 + A + 2I$ 的全部特征值, 并且

$$|A^3 + A + 2I| = |f(A)| = f(-1) \cdot f(1) \cdot f(2) = 0$$

(2) 矩阵 A^* 的特征值及行列式 $|A^{-1} + A^*|$.

由于 A 的特征值均不为 0, 从而 A 可逆. 进而

$$A^* = |A| A^{-1} = -2A^{-1}.$$

由于 A 的全部特征值为 $-1, 1, 2$, A^{-1} 的全部特征值为 $-\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}$

而 $A^* = -2A^{-1}$ 的全部特征值为 $-2, 2, -1$.

$$|A^{-1} + A^*| = |A^{-1} + |A| A^{-1}| = |-A^{-1}| = (-1)^3 |A^{-1}| = \frac{-1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

4. 证明:

(1) 方阵 A 与方阵 A^T 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值. A 的特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = |(\lambda I - A)^T| = |\lambda I - A^T|$$

等于 A^T 的特征多项式(2) 若 λ 是方阵 A 的特征值, 则 λ^k 是方阵 A^k 的特征值 (k 为正整数).不妨设 α 是属于特征值 λ 的一个特征向量. (2)

$$A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$$

$$A^3\alpha = A(A^2\alpha) = A(\lambda^2\alpha) = \lambda^2(A\alpha) = \lambda^2(\lambda\alpha) = \lambda^3\alpha$$

这样依次下去可得

$$A^k\alpha = \lambda^k\alpha \Rightarrow \lambda^k \text{ 是 } A^k \text{ 的一个特征值.}$$

△ → 这是一类常见的问题, 大家要掌握它的技巧.

5. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2I = 0$, 证明 A 的特征值只能取 1 或 2.首先设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.那么 $f(A) = A^2 - 3A + 2I$ 的全部特征值为

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n).$$

另一方面 n 阶零矩阵 O 的全部特征值均为 0, 从而 $O = A^2 - 3A + 2I$ 的全部特征值 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 均为 0.换句话说, A 的任意一个特征值 λ 一定是 $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

的根, 从而 A 的特征值只能取 1 或 2.6. 设 A 为可逆阵, λ_0 为 A 的一个特征值, 对应的特征向量为 α ,(1) 求 A^* 的一个特征值及对应的特征向量;由于 A 可逆, 从而 $\lambda_0 \neq 0$, 且 $A^*A = AA^* = |A|I$.

另一方面, 由于

$$A\alpha = \lambda_0\alpha$$

$$\Rightarrow A^*(A\alpha) = \lambda_0 A^*\alpha$$

$$\Rightarrow |A|\alpha = \lambda_0 A^*\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha = A^*\alpha \Rightarrow \frac{|A|}{\lambda_0} \text{ 是 } A^* \text{ 的一个特征值, } \alpha$$

(2) 求 $P^{-1}AP$ 的一个特征值及对应的特征向量. 是其一个特征向量.由于 P 可逆, 我们首先有 $P^{-1}\alpha \neq 0$ (否则若 $P^{-1}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ 矛盾)

另一方面

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha) = P^{-1}A(PP^{-1})\alpha$$

$$= P^{-1}A\alpha$$

$$= P^{-1}(\lambda_0\alpha)$$

$$= \lambda_0(P^{-1}\alpha)$$

从而 λ_0 是 $P^{-1}AP$ 的一个特征值, $P^{-1}\alpha$ 为其一个特征向量.