

Hai - Jigang Wu

6.2 矩阵的相似对角化

1. 判断矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 是否可对角化, 若可对角化, 求出可逆矩阵 P 和对

应的对角阵 Λ , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

首先考虑 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

★(大家注意计算这种行列式不要去死算, 先仔细观察一下, 上面这个行列式: 将第三行加到第一行之后就可以提一个 $(\lambda-3)$ 出来, 然后就容易计算)

$$f(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-1). \text{ 所以 } A \text{ 可对角化} \Leftrightarrow \begin{cases} r(3I-A) = 3-2=1 \\ r(I-A) = 3-1=2 \end{cases}$$

但是通过计算易知 $r(3I-A) = 2 \neq 1$
从而 A 不可对角化。

2. 设方阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & a & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 试确定常数 a, b , 并

求相似变换矩阵 P .

由于 A 与 B 相似, 从而有

$$\begin{cases} |A| = |B| \\ \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 2b \\ a+5 = b+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

由于相似矩阵拥有相同的特征值, 从而 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$ 为 A 的 3 个不同特征值。对于 $j=1, 2, 3$, 分别求出齐次线性方程组 $(\lambda_j I - A)x = 0$ 的一个基础解系 e_1, e_2, e_3 . 那么由于不同特征值对应的特征向量线性无关 $\Rightarrow P = (e_1, e_2, e_3)$ 可逆, 并且此时

$$AP = A(e_1, e_2, e_3) = (Ae_1, Ae_2, Ae_3) = (e_1, 2e_2, 3e_3) = (e_1, e_2, e_3)B = PB$$

$\Rightarrow P^{-1}AP = B$. (具体的 e_1, e_2, e_3 留给大家了, 这里的答案不唯一)

3. 判断下列各对矩阵是否相似, 并说明其理由.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

由于 A, B 的特征值均为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$, 而由我们课上所说“ n 阶方阵若有 n 个两两不同的特征值, 则必可对角化”, 从而 A, B 均相似于

$$(2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 故 } A, B \text{ 本身也相似。}$$

大家要注意, 这是一个经典的反例说明: 特征多项式相同的矩阵不一定相似。很容易说明 A 不可对角化, 从而 A, B 一定不相似。

4. 已知 $\alpha = (1, 1, -1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量,

(1) 求常数 a, b 以及 α 所对应的特征值 λ ;

由于 α 是 A 的一个特征向量, 从而 $A\alpha$ 与 α 这两个向量是共线的。

$$\text{而 } A\alpha = \begin{pmatrix} a+2 \\ a+2 \\ b+1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ 因此必有 } A\alpha = -\alpha \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=0 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

(2) A 是否相似于对角阵, 说明理由。

将 $a=-3, b=0$ 代入 A , 我们先计算 A 的特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3$$

(大家注意这个时候也不要死算, 由(1)我们已知 $\lambda=-1$ 是 $f(\lambda)$ 的一个根, 所以先想办法提出一个公因式 $(\lambda+1)$ 来, 发现将上面的行列式第 3 行 $\times (-1)$ 以第 2 列 $\times (-1)$ 后同时加到第 3 行上就可以提取 $(\lambda+1)$, 然后下面就容易了。)

从而 A 可对角化 $\Leftrightarrow r(-I-A) = 3-3=0 \Leftrightarrow -I-A=0$

但显然 $-I-A \neq 0$, 从而 A 不可对角化。

6.3 实对称矩阵的相似对角化

1. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 Q 和对角阵 Λ , 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

这是一类经典的问题, 请大家认真阅读讲义《如何将实对称矩阵正交对角化》. 每一位同学都要掌握。

→ (需要一些未讲过的知识, 感兴趣的同学可以看下)

2. 已知三阶实对称方阵 A 的特征值为 $1, -1, -1$, 且 -1 对应的一个特征向量为

为 $\alpha_1 = (1, a, -1)^T$, 1 对应的一个特征向量为 $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, 求常数 a 与方阵 A .

(其实这个问题放在这里并不是特别合适, 需要一个我们课上没有讲过的理论)

首先, 我们知道实对称矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的,

从而 $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0 \Rightarrow a = 1$.

到这里用到的都是我们熟悉的结论。下面我们还需要用一些没有讲过的知识“正交补”。我们简单介绍一下:

设 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间, 我们定义 $W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp y \ \forall y \in W\}$
大家容易验证: $W^\perp$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间, 我们称其为 W 的正交补空间。关于正交补空间我们在这里介绍两个常用的结论: (见右上方)

① $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$.

现在考虑特征子空间

$$W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 1 \cdot x\}$$

$$W_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = -x\}$$

显然此时 $W_{-1} \subseteq W_1^\perp$ (想想看为什么)

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $AX = b$ 有解但不唯一。

不唯一。

(1) 求 a 的值;

利用线性方程组的知识易知 $a = -2$.

(2) 求正交矩阵 Q 和对角阵 Λ , 使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

这个问题就留给大家了, 有必要学会解决这类问题。

→ 另一方面, 由于 A 为实对称矩阵
从而 $\dim(W_1) = 1, \dim(W_{-1}) = 2$
而由红字部分 $\dim(W_1^\perp) = 3 - 1 = 2$.
又 $W_{-1} \subseteq W_1^\perp$, 并且二者维数相同, 从而 $W_{-1} = W_1^\perp$. 换句话说, 此时与 α_2 垂直的非零向量均是 $\lambda = -1$ 对应的特征向量, 从而易得到

$\alpha_1 = (1, 1, -1)^T, \alpha_1' = (0, 1, 1)^T$ 是 $\lambda = -1$ 对应的两个线性无关的特征向量。

和 $P = (\alpha_1, \alpha_1', \alpha_2)$ 必有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ 从而}$$

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$