Hei-Liang Wu　　第2、3两题都是相当经典的习题，大家务必弄明白

第5章 线性方程组

5.1 齐次线性方程组的解

1.求解齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-4x_3=0 \\ -2x_1-4x_2+3x_3=0 \end{cases}$

第一大题大家要认真阅读讲义《如何求解线性方程组(Level 2)》

求齐次线性方程组的基础解系是基本功！每一位同学务必掌握

一个基础解系为 $\xi=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$. 通解为 $\{k\xi \mid k\in\mathbb{R}\}$.

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$

一个基础解系为

$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

通解为

$\{k_1\xi_1+k_2\xi_2 \mid k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$.

2.设4阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关，且 $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$，求齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组

从而 $r(A)=3$，基础解系中所含向量个数为 $4-r(A)=1$.

从而 $Ax=0$ 的任意一个非零解均构成一个基础解系. 由于

$$2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0$$

$\Rightarrow \xi=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 就是一个基础解系. 从而 $\{x\in\mathbb{R}^4 \mid Ax=0\}$

$=\{k\xi \mid k\in\mathbb{R}\}$.

3.已知3阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c)，其中 a,b,c 不全为零，矩阵

$B=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&5\\3&6&-1\end{pmatrix}$ 满足 $AB=0$，求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系与通解.

首先设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由初等行变换易得 $r(B)=2$. 并且 β_1,β_3 线性无关

由于 $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\le 3 \Rightarrow r(A)\le 1$，由于 A 不是零矩阵，从而

$r(A)\ge 1$，综上有 $r(A)=1$.

因此 $Ax=0$ 的基础解系中所含向量个数为 $3-r(A)=2$. 并且此时

$Ax=0$ 的任意两个线性无关的解向量均构成一个基础解系，从而

β_1,β_3 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，并且此时通解为

$$\{k\beta_1+\lambda\beta_3 \mid k,\lambda\in\mathbb{R}\}$$

第2、3题也是相当经典的问题，大家务必要掌握。

5.2　非齐次线性方程组的解

1.求下列非齐次线性方程组的通解及对应的齐次线性方程组的基础解系.

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 &=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3 &=2 \\ x_2+2x_3+3x_4 &=1 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+2x_4 &=4 \end{cases}$

解线性方程组是基本功！
大家要认真阅读帖文
《如何求解线性方程组(初级问题)》
《如何求解线性方程组(Level 2)》

通解为 $\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, k_1,k_2\in\mathbb{R} \right\}$

（2）$x_1+2x_3-3x_4=3$

通解为 $\left\{ \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R} \right\}$

2.已知 $\eta_1=(0,1,0)^T,\eta_2=(-3,2,2)^T$ 是非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

的两个解，求此线性方程组的一般解.

这是一道不错的问题，大家认真阅读一下我的思路，也可以试试看自己的方法。

首先这个非齐次线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解 η_1,η_2，这说明系数矩阵的秩 $r(A)<3$（否则若 $r(A)=3$，由Cramer法则方程组有唯一解）.

另外，发现系数矩阵 A 有一个不为0的2阶子式 $\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}$，从而由矩阵秩的定义我们得到 $r(A)=2$.

下面我们来寻找对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系. 此时基础解系中含有 $3-r(A)=1$ 个向量，从而 $Ax=0$ 的任意非零解均构成基础解系，显然 $\eta_1-\eta_2$ 构成了一个基础解系. 从而 $Ax=b$ 的通解 $\{\eta_1+k(\eta_1-\eta_2)\mid k\in\mathbb{R}\}$.

3.已知线性方程组 $AX=b$ 的三个解是 η_1,η_2,η_3，且 $\eta_1=(1,2,3,4)^T$，

$\eta_2+\eta_3=(3,5,7,9)^T$，秩 $r(A)=3$，求该线性方程组的通解.

首先，我们观察到 $Ax=b$ 是一个由含有4个未知量的线性方程组. 我们先寻找 $Ax=0$ 的一个基础解系. 此时基础解系中所含向量个数为 $4-r(A)=1$. 因为 $Ax=0$ 的任意一个非零解均构成一个基础解系. 注意到

$$\begin{cases} A(\eta_2+\eta_3-2\eta_1)=A\eta_2+A\eta_3-2A\eta_1=b+b-2b=0 \\ \eta_2+\eta_3-2\eta_1=\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\neq 0 \end{cases}$$

从而 $\eta_2+\eta_3-2\eta_1=\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$ 构成一个基础解系. 从而 $Ax=b$ 的通解为 $\{\eta_1+k(\eta_2+\eta_3-2\eta_1)\mid k\in\mathbb{R}\}$