Hai-Liang Wu

第 3 章　空间解析几何与向量运算

3.1　空间直角坐标系与向量

1．设向量 v 的方向余弦分别满足

(1) $\cos\alpha=0$　(2) $\cos\beta=0$　(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$

问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

(i)　v 垂直于 x 轴，或平行于 yoz 平面.

(ii)　v 垂直于 y 轴，或平行于 xoz 平面.

(iii)　v 平行于 z 轴，或垂直于 xoy 平面.

2．已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1), M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角，并求方向与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 一致的单位向量.

由于 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,-\sqrt{2},1)$，有

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2.$$

注意到：

$$\overrightarrow{M_1M_2}^{\,0}=\frac{1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}\overrightarrow{M_1M_2}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

有

$$\overrightarrow{M_1M_2}^{\,0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

并且　$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\ \beta=\frac{3}{4}\pi,\ \gamma=\frac{\pi}{3}.$

3.2　向量的乘法

1．设 $|\alpha|=3, |\beta|=2, \angle(\alpha,\beta)=\frac{2\pi}{3}$，计算:

(1) $(3\alpha-2\beta)\cdot(\alpha+2\beta)$

首先 $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha=|\alpha||\beta|\cos\angle(\alpha,\beta)=-3$.

$$(3\alpha-2\beta)\cdot(\alpha+2\beta)=3\alpha\cdot\alpha+6\alpha\cdot\beta-2\beta\cdot\alpha-4\beta\cdot\beta$$
$$=3|\alpha|^2+4\alpha\cdot\beta-4|\beta|^2$$
$$=-1.$$

(2) α 在 β 上的投影 $\mathrm{Pr}\,j_{\beta}\alpha$

$$\mathrm{Prj}_{\beta}\alpha=|\alpha|\cos\angle(\alpha,\beta)=\frac{-3}{2}$$

2．设 $|\alpha|=3, |\beta|=2, |\alpha+\beta|=4$，求 $|\alpha-\beta|$.

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)=|\alpha|^2-2\alpha\cdot\beta+|\beta|^2 \quad (1)$$

$$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=|\alpha|^2+2\alpha\cdot\beta+|\beta|^2 \quad (2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow |\alpha-\beta|^2+|\alpha+\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2) \quad (3)$$

请解释 (3) 的几何意义.

$$(3)\Rightarrow |\alpha-\beta|=\sqrt{10}.$$

3．设 $|\alpha|=3, |\beta|=26, |\alpha\times\beta|=72$，求 $\alpha\cdot\beta$.

$$|\alpha\times\beta|=|\alpha||\beta|\sin\angle(\alpha,\beta)\Rightarrow\sin\angle(\alpha,\beta)=\frac{12}{13}$$
$$\Rightarrow\cos\angle(\alpha,\beta)=\pm\frac{5}{13}$$
$$\Rightarrow\alpha\cdot\beta=|\alpha||\beta|\cos\angle(\alpha,\beta)$$
$$=\pm 30.$$

4. 设$\alpha=(1,0,-1),\beta=(2,1,0),\gamma=(0,0,1)$，求$(\alpha\times\beta)\cdot\gamma$.

$$(\alpha\times\beta)\cdot\gamma=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

5. 设α,β,γ为单位向量，且满足$\alpha+\beta+\gamma=0$，求$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha$的值.

由于 α,β,γ 为单位向量，有 $\alpha\cdot\alpha=\beta\cdot\beta=\gamma\cdot\gamma=1$.

注意到：

$$0=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=\alpha\cdot\alpha+\beta\cdot\beta+\gamma\cdot\gamma+2(\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha)$$
$$\Rightarrow \alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha=\frac{-3}{2}.$$

6. 如果$\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha=0$，证明$\alpha,\beta,\gamma$共面.

利用我们课上讲的混合积的性质2（请大家务必要掌握）：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

证明：

$$0=0\cdot\gamma=(\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha)\cdot\gamma$$
$$=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma+(\beta\times\gamma)\cdot\gamma+(\gamma\times\alpha)\cdot\gamma$$
$$=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma+\beta\cdot(\gamma\times\gamma)+\gamma\cdot(\gamma\times\alpha)$$
$$=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma+0+(\gamma\times\gamma)\cdot\alpha$$
$$=(\alpha\times\beta)\cdot\gamma\Rightarrow(\alpha\times\beta)\cdot\gamma=0\Rightarrow\alpha,\beta,\gamma\text{共面}.$$

7. 已知$M_1(1,-1,2),M_2(3,3,1),M_3(3,1,3)$，求与两向量$\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_2M_3}$都垂直的单位向量.

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_2M_1}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}.$$

则 $\pm\vec{n}^{\circ}=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{17}},\frac{-2}{\sqrt{17}},\frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$

即为所求.