Hai-Liang Wu（大家注意这里的方法不唯一）



## 3.3 空间中平面的方程

1．求下列平面的方程

(1) 过三点 $(1,1,-1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$ 的平面.

令 $M_1=(1,1,-1)$，$M_2=(-2,-2,2)$，$M_3=(1,-1,2)$

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&-3&3\\0&-2&3\end{vmatrix}=-3\vec{i}+9\vec{j}+6\vec{k}$$

那么 $\frac{1}{3}\vec{n}=(-1,3,2)$ 是平面的一个法向量，从而平面方程为 $-x+3y+2z=0$.

(2) 平行于 $xoz$ 面且经过点 $(2,-5,3)$ 的平面.

由于 $(0,1,0)$ 是 $xoz$ 平面的法向量. 从而 $(0,1,0)$ 也是所求平面的一个法向量，从而平面方程为

$$0(x-2)+1\cdot(y+5)+0(z-3)=0,\ 即$$
$$y+5=0.$$

(3) 平行于 $ox$ 轴且经过两点 $(4,0,-2),(5,1,7)$ 的平面.

令 $M_1=(4,0,-2)$，$M_2=(5,1,7)$. 那么 $\vec{i}\times\overrightarrow{M_1M_2}$ 是所求平面的一个法向量. 而 $\vec{i}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\1&1&9\end{vmatrix}=-9\vec{j}+\vec{k}$

从而平面方程为 $0(x-4)-9(y-0)+1(z+2)=0$ 即

$$-9y+z+2=0.$$

(4) 过点 $M(2,0,-8)$ 且与两平面 $x-2y+4z-7=0$、$3x+5y-2z+3=0$ 都垂直的平面方程.

令 $\vec{n_1}=(1,-2,4)$，$\vec{n_2}=(3,5,-2)$. 那么

$$\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=-16\vec{i}+14\vec{j}+11\vec{k}$$

是所求平面的法向量. 从而平面方程为：

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+8)=0,\ 即\ -16x+14y+11z+120=0.$$

2．求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

$$d=\frac{|1\cdot1+2\cdot2+2\cdot1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1.$$

3．求两平行平面 $2x-y+z-3=0$ 及 $4x-2y+2z+3=0$ 之间的距离.

首先将两平行平面的方程改写为

$$\pi_1:\ 2x-y+z-3=0$$
$$\pi_2:\ 2x-y+z+\frac{3}{2}=0$$

从而 $d=\dfrac{|-3-\frac{3}{2}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

4．判定下列各对平面的位置关系

(1) $2x+4y-2z-1=0$ 与 $x+2y-z+3=0$

由于 $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{-2}{-1}\neq\frac{-1}{3}$

从而两平面平行且不重合.

(2) $2x-3y+z-1=0$ 与 $5x+y-7z=0$

设 $\vec{n_1}=(2,-3,1)$，$\vec{n_2}=(5,1,-7)$.

由于 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0\Rightarrow\vec{n_1}\perp\vec{n_2}\Rightarrow$ 两平面垂直.

## 3.4 空间中直线的方程

1.用对称式及参数式方程表示直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z+9=0\end{cases}$. (参数方程留给大家)

令 $x_0=0$, 通过解方程 $\begin{cases}-4y_0+z_0=0\\-y_0-2z_0=-9\end{cases}$ 得到 $M_0(0,1,4)$ 为 $L$ 上一点.

令 $\vec{n_1}=(2,-4,1)$, $\vec{n_2}=(3,-1,-2)$, 那么

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-4&1\\3&-1&-2\end{vmatrix}=9\vec{i}+7\vec{j}+10\vec{k}$$

为直线的方向向量, 从而直线的对称式方程为: $\frac{x}{9}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-4}{10}$.

2.求过点 $(0,2,4)$ 且与两个平面 $x+2z=1, y-3z=2$ 都平行的直线方程.

设 $\vec{n_1}=(1,0,2)$, $\vec{n_2}=(0,1,-3)$, 那么

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=-2\vec{i}+3\vec{j}+1\vec{k}$$

是所求直线的一个方向向量. 从而直线方程为

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

3. 求直线 $L:\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{-5}$ 与平面 $\pi:2x-3y+5z-8=0$ 的交点与夹角.

设 $L$ 与 $\pi$ 的夹角为 $\theta$. 则有 (令 $\vec{s}=(2,3,-5)$, $\vec{n}=(2,-3,5)$)

$$\sin\theta=|\cos\angle(\vec{s},\vec{n})|=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{15}{19}.$$

$$\Rightarrow \theta=\arcsin\frac{15}{19}.$$

4.求下列平面的方程

(1)求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $L:\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

设 $\vec{n_1}=(1,-2,4)$, $\vec{n_2}=(3,5,-2)$. 那么

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=-16\vec{i}+14\vec{j}+11\vec{k}$$

不仅是 $L$ 的方向向量, 也是所求平面的法向量. 从而平面方程为

$$-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0,\ 即$$

$$-16x+14y+11z+65=0.$$

(2) 求过点 $(1,2,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 平行的平面方程. (注意到 $L_1, L_2$ 方程中分别出现了 $x-y+z-1=0$, $x-y+z=0$).

设 $\vec{n}=(1,-1,1)$, $\vec{s_1}$ 为 $L_1$ 的方向向量, $\vec{s_2}$ 为 $L_2$ 的方向向量. 由于所求平面与 $L_1, L_2$ 均平行, 从而任意一个与 $\vec{s_1}, \vec{s_2}$ 同时垂直的非零向量均为所求平面的法向量. 注意到 $\vec{n}\perp\vec{s_1}$, $\vec{n}\perp\vec{s_2}$, $\vec{n}\neq\vec{0}$. 故 $\vec{n}=(1,-1,1)$ 即为所求平面的一个法向量. 从而平面方程为

$$1(x-1)-1(y-2)+1(z-1)=0\ 即$$

$$x-y+z=0.$$

5.求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

首先令 $y_0=0$, 通过解方程 $\begin{cases}x_0-z_0=-1\\2x_0+z_0=4\end{cases}$ 得到直线上一点 $P_0(1,0,2)$.

令 $\vec{n_1}=(1,1,-1)$, $\vec{n_2}=(2,-1,1)$, $\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=-3\vec{j}-3\vec{k}$, 从而 $\underbrace{-\frac{1}{3}(\vec{n_1}\times\vec{n_2})}_{\vec{s}=}=(0,1,1)$ 是直线的方向向量.

那么 $d=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.