4.4 向量空间

1 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=(5,0,7)^T$，

$\boldsymbol{\beta}_2=(-9,-8,-13)^T$，验证向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 R^3 的一个基，并求向量

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}$. 易验证 $|A|\neq 0$.

从而 $r(A)=3 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 又 $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, 从而 $\mathbb{R}^3$ 中任意 3 个线性无关的向量必构成一组基. 因此, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基.

通过解方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

从而 β_1 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

同理 β_2 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

△ 2.求 R^3 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)^T$ 到基

$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,0)^T$ 的过渡矩阵.

大家要注意：如何求过渡矩阵是一个重要的问题.

设过渡矩阵为 C, 则 C 满足:

$$B=AC,$$

其中 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是基 $\Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow A$ 可逆, 同理 B 也可逆, 从而有

$$C=A^{-1}B.$$

下面用初等行变换法求 $A^{-1}B$ 即可. 最终的结果为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1)^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,3,3)^T$，

$\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1,-1)^T$，证明 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$.

回忆课上所说:

$$L(\alpha_1,\alpha_2)=L(\beta_1,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2 \text{ 与 } \beta_1,\beta_2 \text{ 等价}$$

说明两个向量组等价的方法很多, 这里介绍一个简单的方法

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2)$ 易得 $r(A)=2$. 从而 α_1,α_2 的秩为2.

设 $B=(\beta_1,\beta_2)$ 易得 $r(B)=2$. 从而 β_1,β_2 的秩为2.

要说明 α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价, 只要考虑向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$$

设 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ 易得 $r(C)=2$. 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的秩为 2

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 中任意 2 个线性无关的向量都构成一个极大线性无关组, 因此. α_1,α_2 与 β_1,β_2 均是 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的极大线性无关组.

我们知道向量组的极大线性无关组是等价的. 从而

$$\alpha_1,\alpha_2 \text{ 与 } \beta_1,\beta_2 \text{ 等价}$$

$$\Rightarrow L(\alpha_1,\alpha_2)=L(\beta_1,\beta_2).$$