Hai-Liang Wu (蓝笔改), 大家欣赏)

4.5　向量空间的正交性

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\beta}=(0,1,1)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 的内积 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$ 及夹角.

$$(\alpha+\beta,\alpha-\beta)=(\alpha,\alpha-\beta)+(\beta,\alpha-\beta)$$
$$=(\alpha,\alpha)-(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)-(\beta,\beta)$$
$$=(\alpha,\alpha)-(\beta,\beta)$$
$$=0$$

从而 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 正交.

2. 已知三维线性空间 R^3 中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^T$ 正交，求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交，并将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 标准化.

设 $\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 通过 $(\alpha_1,\alpha_3)=0$, $(\alpha_2,\alpha_3)=0$ 得到

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\0\\-k\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{R}$, 从而取 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 即为所求.

标准化：由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已经两两正交，我们仅需将它们单位化即可.

$$\beta_1=\alpha_1^0=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\alpha_2^0=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \beta_3=\alpha_3^0=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

3. 用施密特正交化方法将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T$ 标准正交化.

（大家注意：这种问题是线性代数的基本功，每位同学均要掌握！）

Step 1. 正交化.

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac12\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac13\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Step 2. 单位化

$$e_1=\beta_1^0=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$e_2=\beta_2^0=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

$$e_3=\beta_3^0=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

4.设 $A=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，求 a、b 的值.

（利用 实矩阵A为正交方阵 ⇔ A的列向量组是标准正交基.）

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$. 则有 $\begin{cases} (\alpha_1,\alpha_2)=0 \\ |\alpha_1|=|\alpha_2|=1 \end{cases}$

从而得到: $\begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

5.设 A 是 n 阶正交阵，证明:

(1) 对任意两个 n 维实列向量 α_1,α_2，总有内积 $(A\alpha_1,A\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)$；

（利用 n维实向量 a,b 的内积 $(a,b)=a^Tb=b^Ta$）.

$$(A\alpha_1,A\alpha_2)=(A\alpha_1)^TA\alpha_2=(\alpha_1^TA^T)A\alpha_2$$
$$=\alpha_1^T(A^TA)\alpha_2$$

由于A是正交阵，从而 $A^TA=I_n$. 因此

$$(A\alpha_1,A\alpha_2)=\alpha_1^T\alpha_2=(\alpha_1,\alpha_2).$$

(2) A^* 是正交阵；

由于A是正交阵，从而 $|A|=\pm1$，因此A可逆.

由于 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^* \Rightarrow A^*=|A|A^{-1}$，知 A^* 是实方阵.

那么

$$(A^*)^T=(|A|A^{-1})^T=|A|(A^{-1})^T=|A|(A^T)^T$$
$$=|A|A$$

（上面这一步利用 A正交阵 ⇔ $A^{-1}=A^T$）

从而 $(A^*)^TA^*=(|A|A)(|A|A^{-1})=|A|^2AA^{-1}=I$（注意 $|A|=\pm1$）

从而 A^* 是正交阵

(3) 若列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交向量组，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 也是标准正交向量组.

$\forall\ i=1,2,\cdots,n$ 有

$$|A\alpha_i|=(A\alpha_i,A\alpha_i)^{\frac{1}{2}}=(\alpha_i,\alpha_i)^{\frac{1}{2}}=|\alpha_i|$$ （利用(1)的结论）

$\forall\ i\neq j$ 有

$$(A\alpha_i,A\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)=0$$ （也利用(1)的结论）

从而 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 是标准正交向量组.

（正交变换不改变夹角，长度！）