第 4 章 n 维向量

4.1 n 维向量及其运算

1.设向量 $\alpha=(1,1,0)^T,\beta=(0,1,1)^T,\gamma=(3,4,0)^T$，求 $3\alpha+2\beta-\gamma$.

易得：$3\alpha+2\beta-\gamma=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

2.设 $\alpha_1=(1,0,-1,2)^T,\alpha_2=(2,0,1,1)^T,\alpha_3=(2,-1,0,1)^T$，求向量 α，使得 $\alpha_1+\alpha_2-\alpha=2\alpha-\alpha_3$.

显然此时有

$$3\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\-1\\0\\4\end{pmatrix}.$$

4.2 向量组的线性相关性

1.把向量 β 表示成向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，其中

$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T,\beta=(1,2,3)^T$.

大家注意这种问题本质上是解线性方程组. 设方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1=-1\\x_2=-2\\x_3=4\end{cases} \quad 从而\ \beta=-\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3.$$

2.设 $\alpha_1=(1,2,3)^T,\alpha_2=(-1,1,4)^T,\alpha_3=(3,3,2)^T$，证明向量 $\beta=(4,5,5)^T$ 可用多种形式表示成向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，并写出所有的线性组合.

这个问题也是线性方程组的问题. 设方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$$

将其化为线性方程组（如何求解线性方程组参见讲义《如何求解线性方程组相关问题》）

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=4\\2x_1+x_2+3x_3=5\\3x_1+4x_2+2x_3=5\end{cases} \Rightarrow 通解为（参数形式）\begin{cases}x_1=3-2k\\x_2=-1+k\\x_3=k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

从而 $\beta=(3-2k)\alpha_1+(-1+k)\alpha_2+k\alpha_3,\ k\in\mathbb{R}$.

3.判断下列向量组是否线性相关：

(1) $\alpha_1=(1,3,-5,1)^T,\alpha_2=(2,6,1,4)^T,\alpha_3=(3,9,7,10)^T$

判断一个向量组是否线性相关方法是简单的.

Step 1. 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

Step 2. 求出 A 的秩 $r(A)$（如何求矩阵的秩参见讲义《如何求矩阵的秩及相关问题》）

利用初等行变换得 $r(A)=3$

Step 3. 由于 $r(A)=$ 向量组中向量个数 3，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

(2) $\alpha_1=(1,-4,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(1,14,7)^T$

Step 1. 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-4&2&14\\1&3&7\end{pmatrix}$

Step 2. 注意 A 是一个方阵，我们可以利用行列式来处理

由于 $|A|=0 \Rightarrow r(A)<3 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

(3) $\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1,0)^T,\alpha_3=(0,0,1,1)^T,\alpha_4=(0,1,0,1)^T$

Step 1 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

Step 2. 注意A此时又是方阵，我们可以通过行列式来判断.

由于 $|A|=0 \Rightarrow r(A)<4 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

注：如何判断向量组的线性相关性参见讲义《如何求向量组的秩与极大线性无关组》.

4. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：

(1) 向量组 $2\alpha_1+3\alpha_2$，$\alpha_2+4\alpha_3, 5\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.

这个问题我们介绍两种方法.

方法1. 利用线性无关的定义.

考虑方程：

$x_1(2\alpha_1+3\alpha_2)+x_2(\alpha_2+4\alpha_3)+x_3(5\alpha_3+\alpha_1)=0$

整理得到：

$(2x_1+x_3)\alpha_1+(3x_1+x_2)\alpha_2+(4x_2+5x_3)\alpha_3=0$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\Rightarrow \begin{cases}2x_1+x_3=0\\3x_1+x_2=0\\4x_2+5x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$

$\Rightarrow 2\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_2+4\alpha_3, 5\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

方法2. 利用矩阵的秩.

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$B=(2\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_2+4\alpha_3, 5\alpha_3+\alpha_1)$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且矩阵的秩等于其列秩，有 $r(A)=3$. 注意到

$(2\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_2+4\alpha_3, 5\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&0\\0&4&5\end{pmatrix}$

令 $Q=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&0\\0&4&5\end{pmatrix}$ 易得 $|Q|\neq 0$，从而Q可逆

从而

$r(B)=r(AQ)=r(A)=3$ (乘上可逆矩阵不改变秩)

$\Rightarrow$ B的列秩为3 $\Rightarrow$

$2\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_2+4\alpha_3, 5\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关

(2) 向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关.

因为

$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0.$

从而它们线性相关。

5. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关， $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，证明：

(1) α_1 能由向量 α_2,α_3 线性表出

$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 (向量组线性无关，其子向量组也线性无关)

$\left.\begin{array}{l}\alpha_2,\alpha_3 \text{ 线性无关}\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \text{ 线性相关}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1$ 可以由 α_2,α_3 线性表示 (并且表示法唯一)

(2) α_4 不能由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出

这个问题也有许多方法，这里我们介绍一个简单的方法

假设：α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，那么

向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组B: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 等价

从而 $r(A)=r(B)$

但是 $r(A)=2$，$r(B)=3$ 矛盾.

从而 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.