## 4.3 向量组的秩

1. 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(3,0,7,14)^T$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)^T$ $\alpha_5=(2,1,5,0)^T$，求向量组的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量该极大线性无关组表示.

如何求向量组的秩与极大线性无关组是重点考察大家的问题，每一位同学都要弄明白.

这道题的详细解答在微《如何求向量组的秩与极大线性无关组中》.

大家要注意：这种问题一定要弄明白！

2.(1)确定 $a,b$，使矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}$ 的秩为 2;

(2)求秩为 2 时 $A$ 的列向量组的一个极大线性无关组，并用它表示其余列向量.

(1) 用初等行变换得到 $\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$

(具体的变换过程我省略了，大家要自行补齐)

若 $a\neq0$ 或 $b-2\neq0$，则易得 $r(A)=3$. 从而 $r(A)=2\Rightarrow a=0$ 且 $b=2$.

(2) 将(1)中($a=0,b=2$)代入后得到的行阶梯形矩阵化为行最简矩阵(继续使用初等行变换)

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)\cdot r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于第一行首不为0的元素在第1列，第二行首不为0的元素在第2列)

从而 $\alpha_1,\alpha_2$ 是A的列向量组的一个极大线性无关组

$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=-5\alpha_1+6\alpha_2$，$\alpha_6=-2\alpha_1+3\alpha_2$.

3.设 $\alpha_1$ 是任意的四维非零列向量，$\alpha_2=(2,1,0,0)^T,\alpha_3=(4,1,4,0)^T$，$\alpha_4=(1,0,2,0)^T$，若向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，试证向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

设 $A=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 易得 $r(A)=2$，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为2，也就是说 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组中有两个向量.

另一方面，$\forall$ 四维非零列向量 $\alpha_1$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩不超过3.

从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组至多含有3个向量，而这个极大线性无关组可以表示 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$.

回忆课上说的："一个向量组如果能被另一个所含向量个数更少的向量组表示，那么它本身必线性相关！"

从而 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

4.已知秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3,r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4$，证明 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=4$.

$\left\{\begin{array}{l} r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3\\ r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{ 线性无关}\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\text{ 线性相关}\end{array}\right. \Rightarrow \alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

从而 $\alpha_4$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性表示 $\Rightarrow$ $\alpha_5-\alpha_4$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性表示.

另一方面，由于 $\alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示 $\Rightarrow$ $\alpha_5$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性表示.

从而向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 与向量组 B：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 等价. 进而 $r(A)=r(B)\Rightarrow r(B)=4$.